Φυλλάδιο 1ο 7/4/2017

άσκ 6

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0 \ (1)$

α) ν.δ.ο τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ συνεπίπεδα

Απ τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ συνεπ. $\Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \\ \text{από (1)} \quad \vec{\gamma} = -\vec{\alpha}-\vec{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, -\vec{\alpha}-\vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, -\vec{\alpha} \rangle + \langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, -\vec{\beta} \rangle$$
$$= -\langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle - \langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle = -0-0=0$$

β) Έστω $\vec{\delta} \in \mathbb{R}^3 \in$ στο επίπεδο των $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ ν.δ.ο $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times(\vec{\gamma}\times\vec{\delta}) = \vec{0}$

Απ αρκεί νδ.ο $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma}\times\vec{\delta}$ είναι συγγραμμικά διανύσματα (ή παράλληλα). Το $\vec{\alpha}\times\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δηλ $\vec{\alpha}\times\vec{\beta} \perp$ στο επίπεδο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Το $\vec{\gamma}\times\vec{\delta} \perp \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ δηλ $\vec{\gamma}\times\vec{\delta} \perp$ στο επίπεδο των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$

$\Rightarrow$ αφού τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ είναι στο ίδιο επίπεδο $\Rightarrow \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma}\times\vec{\delta} \perp$ στο ίδιο επίπεδο

$\Rightarrow \vec{\alpha}\times\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}\times\vec{\delta}$

ή

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \vec{\varepsilon}$

$$(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\delta})\vec{\gamma} - (\vec{\varepsilon}\vec{\gamma})\vec{\delta} = \underbrace{(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})}_{=0 \text{ διότι } \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\delta} \text{ συνεπίπεδα}}\vec{\gamma} - (\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\,\vec{\gamma})\vec{\delta}$$
$$= \vec{0}\cdot\vec{\gamma} - 0\vec{\delta} = 0$$

άσκ 4

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ βάση του $\mathbb{R}^3$ ν.δ.ο τα $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\beta}\times\vec{\gamma}, \vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$ είναι Γ.Α και να συμπεράνετε ότι αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$

Έστω $\lambda(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) + \mu(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) + \nu(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}) = \vec{0} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^3$ ΘΔο $\lambda=\mu=\nu=0$

πολλαπλ εσωτ με $\vec{\alpha}$

$$\Rightarrow \lambda\underbrace{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha})}_{0} + \mu(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}) + \nu\underbrace{(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\alpha})}_{0} = 0$$

* 3 διανύσματα Γ.Ε $\Leftrightarrow$ είναι συνεπίπεδα $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}) \neq 0$ $\boxed{\mu=0}$

• $\vec{\beta} \Rightarrow \nu(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \overset{*}{\Rightarrow} \nu = 0$

• $\vec{\gamma} \overset{*}{\Rightarrow} \lambda = 0$

Αυτά τα 3 διανύσματα αποτελούν βάση διότι βρίσκονται σε χώρο διάστασης 3 και είναι γρ. ανεξάρτητα.

<u>ασκ 5</u>

Έστω μοναδιαία $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

$$-((((\underbrace{\underbrace{(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}_{-\vec{\alpha}}) \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$$

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} = \cancel{(\vec{\alpha}\vec{\beta})}\vec{\beta} - \cancel{(\vec{\beta}\vec{\beta})} \cdot \vec{\alpha} = -\vec{\alpha}$$

0 διότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, 1

<u>ασκ 9</u>

$\|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta}\| = \|\vec{\gamma}\| = 1$, ανα δύο ίσες γωνίες

$\Downarrow$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

$*$ $\vec{\beta}\vec{\gamma} = \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$

$\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \cos(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$

$\vec{\lambda} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad , \vec{\mu} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \times (\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$ να εξετάσετε αν $\vec{\lambda} \parallel \vec{\mu}$

δηλ

Εξετάζω αν $\vec{\lambda} \times \vec{\mu} = \vec{0}$

$$\underbrace{(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})}_{\varepsilon_1} \times \left(\underbrace{(\vec{\alpha} - \vec{\beta})}_{\varepsilon_2} \times \underbrace{(\vec{\alpha} - \vec{\gamma})}_{\varepsilon_3}\right) =$$

$$= \left((\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\gamma})\right)(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - \left((\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})\right)(\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$$

$$= \left(\vec{\alpha}\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\beta}\vec{\alpha} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\vec{\gamma}\right)(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - \left((\vec{\alpha}\vec{\alpha}) - \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\alpha} - \vec{\beta}\vec{\beta} + \vec{\gamma}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\vec{\beta}\right)(\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$$

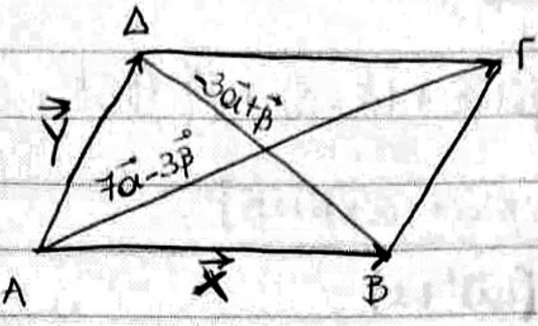
$$=(\vec{\beta}\vec{\alpha}-\vec{\beta}\vec{\gamma})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-(\vec{\gamma}\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\overset{*}{=}0$$

ασκ 13

$\|\vec{\alpha}\|=\|\vec{\beta}\|=1 \quad (\vec{\alpha},\vec{\beta})=\pi/4$

Διαγώνιοι: $7\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

$-3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$



$E=\|\vec{AB}\times\vec{A\Delta}\|=\|\vec{x}\times\vec{y}\|$

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y}&=7\vec{\alpha}-3\vec{\beta} \quad (1)\\ \vec{x}-\vec{y}&=-3\vec{\alpha}+\vec{\beta} \quad (2)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(+)} 2\vec{x}=4\vec{\alpha}-2\vec{\beta} \Rightarrow \boxed{\vec{x}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}}$$

$$\vec{x}-\vec{y}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{y}=(-3\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{y}=5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}}$$

$$\vec{x}\times\vec{y}=(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})\times(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=\underbrace{\cancel{10\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}}}_{0}-4\vec{\alpha}\times\vec{\beta}-5\vec{\beta}\times\vec{\alpha}+\overset{0}{\cancel{2\vec{\beta}\times\vec{\beta}}}$$

$$=-4\vec{\alpha}\times\vec{\beta}-5\vec{\beta}\times\vec{\alpha}=-4\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+5\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$$

$$|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=\overset{1}{\cancel{\|\vec{\alpha}\|}}\,\overset{1}{\cancel{\|\vec{\beta}\|}}\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$E=\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ τμ.

ασκ 16

$\vec{x}\times\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\vec{x} \qquad \vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^3$ γνωστά

• Αν $\vec{\alpha}=\vec{0} \Rightarrow \vec{0}=\vec{\beta}-\vec{x} \Rightarrow \vec{x}=\vec{\beta}$

• Έστω $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

Εσωτ. $\cdot\vec{\alpha}$ $\quad (\vec{x}\times\vec{\alpha})\vec{\alpha}=(\vec{\beta}-\vec{x})\vec{\alpha}$

$$\underbrace{(\vec{x},\vec{\alpha},\vec{\alpha})}_{0}=(\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{x}\vec{\alpha}) \Rightarrow \boxed{\vec{x}\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\vec{\beta}} \; (*)$$

πολλαπλ. εξωτερικά (δεξιά) με $\vec{\alpha}$

$$(\vec{x}\times\vec{\alpha})\times\vec{\alpha} = (\vec{\beta}' - \vec{x})\times\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\underbrace{(\vec{x}\vec{\alpha})}_{\text{όχι καλό}}\vec{\alpha} - \underbrace{(\vec{\alpha}\,\vec{\alpha})\,\vec{x}}_{\text{καλό}} = (\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \underbrace{\vec{x}\times\vec{\alpha}}_{\text{όχι καλό}} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{και } (*)]{\text{από υπόθεση}} (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha} - \|\vec{\alpha}\|^2\cdot\vec{x} = (\vec{\beta}'\times\vec{\alpha}) - (\vec{\beta} - \vec{x}) \Rightarrow$$

$$\left[(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha} + (\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) + \vec{\beta}\right] = (\|\vec{\alpha}\|^2 + 1)\,\vec{x} \Rightarrow$$

$$\vec{x} = \frac{\left[(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha} + (\vec{\alpha}'\times\vec{\beta}) + \vec{\beta}\right]}{(\|\vec{\alpha}\|^2 + 1)}$$

ασκ 10

$\vec{\alpha} = (4,-5,3)$ να αναλυθεί σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διευθ. του $\vec{\beta}' = (-2,3,1)$

Θέλουμε να:

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha_1} + \vec{\alpha_2}$, : $\vec{\alpha_1} \perp \vec{\alpha_2}$, π.χ. $\vec{\alpha_1} = k\cdot\vec{\beta}$ $\quad k \in \mathbb{R}^*$

$\vec{\alpha_1} = k\cdot\vec{\beta} = k(-2,3,1) \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha_1} = (-2k, 3k, k)}$ $\quad k \in \mathbb{R}^*$

και $\vec{\alpha_2} = \vec{\alpha} - \vec{\alpha_1} = (4,-5,3) - (-2k,3k,k) =$

$= (4+2k, -5-3k, 3-k) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{\alpha_2} = (4+2k, -5-3k, 3-k)}$ $\quad k \in \mathbb{R}^*$

αλλά $\vec{\alpha_1} \perp \vec{\alpha_2} \Rightarrow \langle\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}\rangle$

$\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\alpha_2} = 0 \Rightarrow (-2k, 3k, k)(4+2k, -5-3k, 3-k) = 0$

$\quad\parallel$

$-2k\cdot(4+2k) + 3k\cdot(-5-3k) + k(3-k) = 0 \Rightarrow$

$-8k - 4k^2 + (-15k - 9k^2) + 3k - k^2 = 0 \Rightarrow$

$k = 0, -10/7$ για το $k=0$ απορρίπτεται.

για $k = -\frac{10}{7}$ ... $\vec{\alpha_1} = \left(\frac{20}{7}, \frac{-30}{7}, \frac{-10}{7}\right)$ $\quad \vec{\alpha_2} =$